مقدمة :

المصريون القدامى هم أول من استخدم الحساب المثلثي لبناء الأهرامات والمعابد الفرعونية ولدراسة الفلك وحساب المسافات الجغرافية وقياس زوايا الإرتفاع والإنخفاض .

I. النسب المثلثية لزاوية حادة :

تعريف

في مثلث ABC قائم الزاوية في A، النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$ هي :

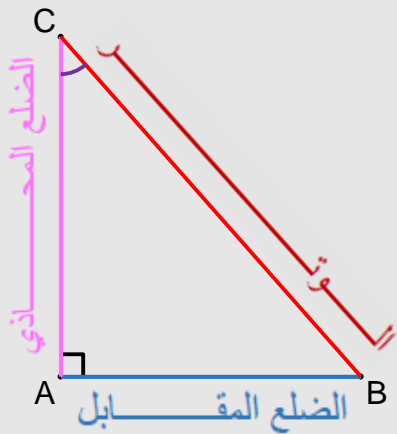
✓ النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $sin\ A\hat{C}B$

بتعبير آخر $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{C}}{\text{الوتـــــــر}} = sin\ A\hat{C}B$

✓ النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $\cos A\hat{C}B$

بتعبير آخر $\frac{AC}{BC} = \frac{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{C}}{\text{الوتـــــــر}} = \cos A\hat{C}B$

✓ النسبة $\frac{AB}{AC}$ تسمى ظل الزاوية $A\hat{C}B$ ونرمز لها ب $\tan A\hat{C}B$

بتعبير آخر $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{C}}{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{C}} = \tan A\hat{C}B$

مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

$AB = 3\ cm$ و $AC = 4\ cm$ و $BC = 5\ cm$

أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{B}C$:

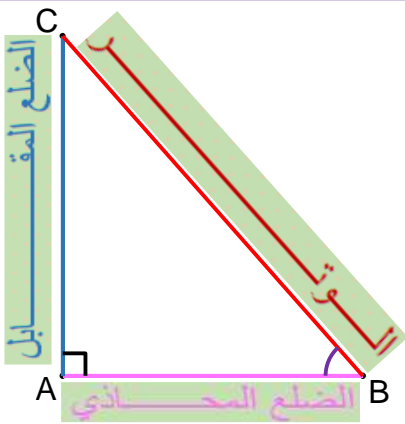
أ- لنحسب $sin\ A\hat{B}C$:

$$\sin A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{B}}{\text{الوتـــــــر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

ب-لنحسب $\cos A\hat{B}C$:

$$\cos A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{B}}{\text{الوتـــــــر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

ت-لنحسب $\tan A\hat{B}C$:

$$\tan A\hat{B}C = \frac{\text{الضلع المقابل لِ } \hat{B}}{\text{الضلع المحاذي لِ } \hat{B}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} = 1{,}33$$

ملاحظة :

☆ الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية ويكون مقابل للزاوية القائمة .

☆ إذا كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$ فإن :

$0 < \sin\alpha < 1$ و $0 < \cos\alpha < 1$ لاحظ ذلك في المثال (أ) و (ب) أعلاه

II. علاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة :

خاصية 1

إذا كان α قياس زاوية حادة فإن :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

مثال :

α قياس زاوية حادة بحيث : $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

أحسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$

❖ لنحسب $\sin\alpha$:

نعلم أن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

إذن $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

إذن $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$

$\sqrt{\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{5}{9}}$ وبالتالي $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

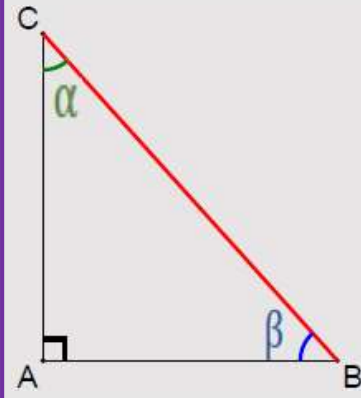
وبما أن $0 < \sin\alpha < 1$
إذن يمكن أن ندخل الجذر
عليها من أجل التخلص
من المربع لأنها موجبة

❖ لنحسب $\cos\alpha$:

نعلم أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

إذن $\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

وبالتالي $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

خاصية 2

إذا كان α و β قياسي زاويتين حادتين متتامتين أي $\alpha + \beta = 90°$ فإن :

$$\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta} \\ \tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$$

أمثلة :

$\sin 70° = \cos 20°$

$\cos 30° = \sin 60°$

$\sin 80° = \cos 10°$

$\cos 45° = \sin 45°$

$tan\, 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$

$\tan 11° = \dfrac{1}{tan\, 79°}$

أحسب مايلي : $A = \cos^2 30° + \cos 10° + \tan 20° \times \tan 70° + \sin^2 60° - \sin 80°$

III. جدول النسب المثلثية لزوايا خاصة :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

لإيجاد الزاوية α بحيث $\sin\alpha = 1$

باستخدام الآلة الحاسبة إضغط بالترتيب على

shift ثم Sins ثم 1

لتشاهد على الشاشة °90

تطبيق : إذا كنت تسكن بالقرب من المطار وشاهدت طائرة تحلق على ارتفاع $1000m$ وقمت بتقدير زاوية إرتفاعها فكانت °30 .

أحسب d مسافة بعد الطائرة عن مكان الهبوط ؟

الحـــــل : لدينا $\sin 30° = \dfrac{1000}{d}$

إذن $d = \dfrac{1000}{sin\, 30°} = \dfrac{1000}{\frac{1}{2}} = 1000 \times \dfrac{2}{1}$

وبالتالي $d = 2000m = 2\ km$